一つの地区の住民の数をN（当然全員が未感染者である）とし、一人の感染者が発生し他の

未感染者にウィルスを移す日を0とする。

その移された感染者がまた同様にその他の未感染者にウィルスを感染させるとする。

t日後のウィルス感染者数をY(t)とし、短い日数Δｔの間に感染した者の増加数ΔYが、その時

までに既に感染していた者の数　Y(t)(1-b) と未感染者数 N-Y(t) とに比例するとする。

ここでbは、感染者の治癒、あるいは死亡による減少割合である。

この時、ある比例定数a(次元は(1/人日)＾(註1)を用いて

ΔY=aY(t)(1-b){N-Y(t)}Δｔが成り立つ。

そこでΔｔ→0とすると、Y(t)は微分方程式

dY(t)/ｄｔ=aY(t)(1-b){N-Y(t)}＾(註2)が得られる。

これを解く。

dY(t)/[Y(t){N-Y(t)}]=a(1-b)dt

1/[Y(t){N-Y(t)}]を部分分数に展開すると、(1/N)[{1/Y(t)}+1/{N-Y(t)}]

これを代入すると

dY(t)/{Y(t)}+dY(t)/{N-Y(t)}=a(1-b)Ndt

d[ln{Y(t)}]-d[ln{N-Y(t)}]=a(1-b)Ndt

ln[{Y(t)/{N-Y(t)}]=a(1-b)Nt+C ①

t=0の時Y(t)=1であるので、C=ln{1/(N-1)}=-ln(N-1)

これを①に代入し、

ln[{Y(t)}/{N-Y(t)}]=a(1-b)Nt-ln(N-1)

=ln[exp{a(1-b)Nt)}/(N-1)]

∴{Y(t)}/{N-Y(t)}=exp{a(1-b)Nt)}/(N-1)

逆数は、 {N/Y(t)}=(N-1)exp{-a(1-b)Nt)}+1

もう一度逆数を求めると、 Y(t)=N/[(N-1)exp{-a(1-b)Nt)}+1]

t=0の時は間違いなくY(0)=1となっており

ｔ→∞の時は、Y(t)→Nとなり、題意を満足している。

------------------

<註1>aは一人の感染者が一日に未感染者を感染させる割合、例えば100人の地区で感染者

一人が１日に未感染者一人を感染させるなら1％、つまり 0.01/100(1/日)という値、N人の地区

ならこの値は 0.01/N(1/日)となる。

従って、指数函数の指数のa(1-b)Nを改めてAと置くと、 Y(t)=N/[(N-1)exp(-At)+1]

として Y(t)を求めることができる。

<註2>時間(実際は日数である）がｔをｎ等分し

ｄY(Δt)/dt ＝aY(0)(1-b){N-Y(Δt)}

ｄY(2Δt)/dt＝aY(Δt)(1-b){N-Y(2Δt)}

ｄY(3Δt)/dt＝aY(2Δt)(1-b){N-Y(3Δt)}

------

ｄY(nΔt)/dt＝aY{(n-1)Δt}(1-b){N-Y(nΔt)}

とすると、左辺を足し合わせ dtを掛けると積分になり、[Σ(i=0-n)dY(iΔt)/dt]dt=Y(t)

右辺も同様に足し合わせdtを掛けると

[Σ(i=0-n)aY(iΔt)(1-b)・N-Σ(i=0-n)aY{(i-1)Δt}(1-b)・Y(iΔt)]dt

=a[Y(t)・N](1-b)dt -[Σ(i=0～n)aY{(i-1)Δt}・Y(iΔt)](1-b)dt

ここで、Δtを限りなく0に近づければ、 aY{(i-1)Δt}≒aY(iΔt) と置いて、

ｄY(t)/dt=aY(t-Δt)(1-b){N-Y(t)}　を得る。