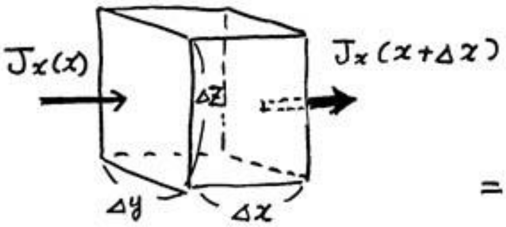
原子炉理論との対比について

原子炉理論における中性子のバランスの式は
$D\nabla^2\phi - \Sigma_a \cdot \phi + k_\infty \cdot \Sigma_a \cdot \phi + (S) = (1/v) \cdot \partial\phi/\partial t$　と表される。
左辺第一項は拡散、第二項は吸収、第三項は核分裂による倍増、第四項は中性子源（原子炉起動後は不要であるので無視される）。そして、右辺は中性子の増加率を表わす。
なお、ϕは中性子密度に速度を乗じたフルエンス、中性子束である。
下図に示すように体積要素$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$への単位時間当たりの正味の流入を考える。

これを、ΔｘΔｙΔｚで割ると、単位時間、単位体積当たりの正味の流入となる。拡散理論では、これを用いて中性子の収支が表される。



単位時間当りの
x方向(±)からの
正味の流入：

$$\{J_x(x) - J_x(x+\Delta x)\}\Delta y\Delta z$$

$$= D\left\{\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_x - \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\right\}\Delta y\Delta z$$

$$= D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\Delta x\Delta y\Delta z$$

[体積要素への正味の流入] 単位時間・単位体積

$$= D\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right\} = D\nabla^2\phi$$

図　体積要素への正味の流入

原子炉の中で吸収される（これを落とし穴には嵌ると言い直すと）中性子が嵌る穴の大きさをσ_a（この大きさは吸収断面積と呼ばれる）、その密度（単位体積当たりの落とし穴の数）をN_aとすると、$\sigma_a N_a$が落とし穴の全断面積を表わすことになる。これをΣ_aと書いている。

核分裂によって発生した中性子(η)は高速（MeV）で、連鎖反応を起こすためには熱中性子($10^{-2}\,eV$)まで減速させる必要がある。核燃料に吸収されて発生するそれまでの間に、高速のまま吸収されて核分裂を起こす(ε)、他の燃料($U238$)に共鳴吸収されて減少(p)、そして核燃料に吸収されて減少(f)、の4つのステップを経る。この中性子数を増減させる四つの因子を合わせて四因子と呼んでいる。それ以外に中性子数を変化させるのは炉外に漏れる中性子数で、漏れのない無限大の炉を想定した場合の中性子増倍率をk_∞としており、$k_\infty = \eta \cdot \varepsilon \cdot p \cdot f$を四因子公式と呼んでいる。

この中性子の拡散方程式が感染者数のバランスの式を導く際、どのように対応するか考える。大前提として、未感染者数 N と感染者数 H の和は一定であるとする。

$N + H = No$

$-\nu \cdot \Sigma_N N + k_\infty H + Ho = dH/d\,(t/\rho)$

原子炉理論の拡散方程式の第一項に相当する項は不要。第二項、$-\nu \cdot \Sigma_N N$ は消滅、第三項 $k_\infty H$ は倍増、第四項 Ho は感染源で、原子炉理論の中性子源に相当する。

右辺は感染者の増加数 $dH/d\,(t/\rho)$ を表わす。ρ は人体内でのウィルスの寿命、ν は感染者が出すウィルスの数、Σ_N はウィルスを掛けられる未感染者の巨視的断面積である。

この後の詳細計算は、$\mathrm{c}oronaR2.pdf$ に示しているのでそちらでご覧いただくこととして、原子炉理論との対比について、今少し記述を進めることにする。

k_∞ は、原子炉の理論では原子炉の形状、寸法によって変わるので、これについても、感染の広がりと対比させることができる。

人の活動舞台が、厚さ数十センチの水を張った無限平板を横にした原子炉の中であると想定すると、上下方向への中性子の漏れが考えられるように、人の活動範囲も広がる。

この想定では、増倍率は $k_\infty / \{(1 + (\pi/0.5)^2\}$ となる。

平板の面積を狭めればこの式の分母には、$(2.405/R)^2$ が追加され、

$\{(1 + (\pi/0.5)^2\} / \{(1 + (\pi/0.5)^2 + (2.405/R)^2\}$ となるので倍増率は低下する。この原子炉の形状、寸法によって決まる $(\pi/0.5)^2 + (2.405/R)^2$ 等の量は、バックリングと呼ばれている。